Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Rabat
Département de Physique

Année universitaire 2008-2009

Filière SMI-SM
Section A

Travaux dirigés de Mécanique du Solide
Série-4

Exercice 1 : Mouvement d'une barre dans un cercle fixe

Dans un repère fixe orthonormé direct galiléen $R_0=(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ où $\vec{Ox_0}$ désigne la verticale descendante, on considère un cercle fixe (C) d'équations $z = 0$ et $x^2 + y^2 = R^2$.
Les extrémités d'une barre (AB) homogène, pesante, de longueur $2a < 2R$, de masse m et de centre d'inertie G, se déplacent sans frottement sur (C).

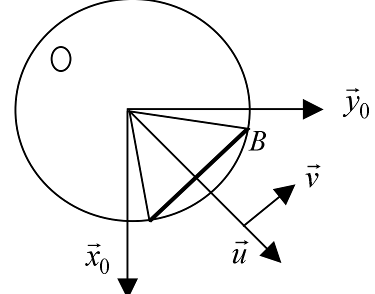
On pose $2\alpha = (\vec{AO},\vec{OB})$, $\vec{OG} = R\cos\alpha\,\vec{u}$, $\vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$, $\theta = (\vec{Ox_0}, \vec{Ou})$ et g l'intensité de la pesanteur.

On défini deux autres repères orthonormés directs : $R'=(O;\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ obtenu à partir de R_0 par une rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{Oz_0}$ et $R_S=(G;\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ obtenu à partir de R' par une translation de vecteur $\vec{OG}=R\cos\alpha\,\vec{u}$.

1- Déterminer le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}(R_S/R_0)$, de (AB) par rapport à R_0.

2- En appliquant le théorème du moment dynamique déterminer l'équation du mouvement de la barre (AB).Evaluer $\theta(t)$ pour de faibles valeurs de θ.

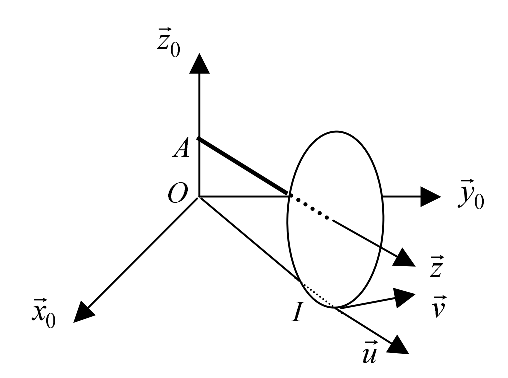
3- Calculer explicitement $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ en fonction de a, α, R et θ. On évaluera $\vec{R}_A$ dans la base $(\vec{u}_1,\vec{v}_1,\vec{z}_0)$ défini par $\vec{OA}=R\,\vec{u}_1$, $\vec{v}_1=\vec{z}_0 \wedge \vec{u}_1$ et $\vec{R}_B$ dans la base $(\vec{u}_2,\vec{v}_2,\vec{z}_0)$ défini par $\vec{OB}=R\,\vec{u}_2$, $\vec{v}_2=\vec{z}_0 \wedge \vec{u}_2$.



Exercice 2: Mouvement d'un disque lié à une tige sur un plan

On considère le système mécanique ($S=T\cup D$) (voir figure) formé d'une tige ($T=AC$) homogène, de centre G_1, de longueur 2ℓ de masse m_1 articulée aux centre C d'un disque homogène (D) de rayon a et de masse m_2 . La tige (AC) est liée perpendiculairement à l'axe rigide Oz_0 du repère fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et au centre d'inertie C du disque. Le disque reste toujours en contact ponctuel au point avec le plan (x_0Oy_0). Soit $R(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct lié au disque tel que : $\vec{u}=\dfrac{\vec{AC}}{//\vec{AC}//}$.

On pose $\vec{R}_I = X_I\vec{u} + Y_I\vec{v} + Z_I\vec{z}_0$ et $\vec{R}_A = R_1\vec{u} + R_2\vec{v} + R_3\vec{z}_0$ les réactions respectivement au points I et A et on note par f le coefficient de frottement développé au point de contact I.



Cinématique

1- Paramétrer le système et donner la vitesse instantanée de rotation, $\vec{\omega}(D/R_0)$, du disque par rapport à R_0.
2- Déterminer la vitesse et l'accélération d'un point M lié au disque.
   En déduire la vitesse de glissement, $\vec{v}_g$, du disque ainsi que son accélération au point de contact I.
3- Montrer que si $\vec{v}_g = 0$, l'accélération du point I est perpendiculaire à AI.
4- Donner l'expression de l'invariant vectoriel du torseur cinématique du disque.
   En déduire dans le cas de non glissement, $\vec{v}_g = 0$, l'axe instantanée de rotation du torseur cinématique du disque.

Cinétique

1- Déterminer le torseur cinétique du disque (D) au point G
2- Déterminer le torseur cinétique de la tige (T) au point A
3- Déterminer l'énergie cinétique du système

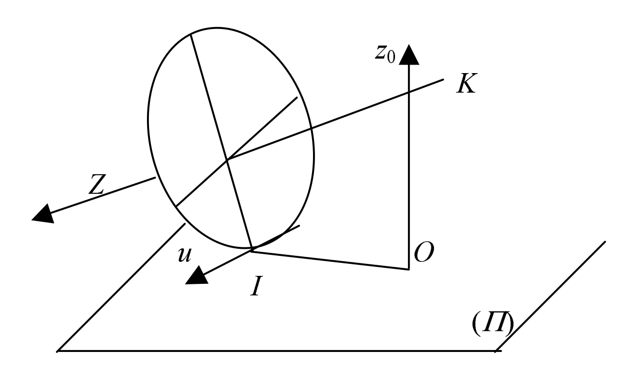
Dynamique

1- En appliquant le théorème du moment dynamique au point A établire l'équation du mouvement
2- Donner l'expression de $\overset{\circ}{\psi}(t)$ en fonction de la vitesse de glissement v_g sachant qu'à l'instant $t = 0$ $\overset{\circ}{\psi}(0) = \overset{\circ}{\psi}_0$.
3- A partir des lois de frottement déduire l'expression des composantes X_I, Y_I, et Z_I de la réaction au point de contact I.
4- En appliquant le théorème de la résultante dynamique déterminer en fonction des paramètres du système la réaction au point A.
5- Que peut-on dire des réactions $\vec{R}_I$ et $\vec{R}_A$ si le disque roule sans glissement(v_g=0). Quelle est dans ce cas la nature du mouvement .
6- Dans le cas du roulement sans glissement, déterminer la nature du mouvement du système à partir du théorème de l'énergie cinétique sachant que la liaison au point C est parfaite.

Exercice 3: **Mouvement d'un disque sur un plan en rotation**

Un disque circulaire homogène(D) de centre C, de rayon $2a$, de masse m, repose par un point I de sa circonférence en mouvement sur un plan Π horizontal. Le plan Π est animé d'une rotation uniforme de vitesse angulaire $\omega > 0$, autour d'une verticale fixe Oz_0 ; le point O est situé dans le plan Π. Au contact du disque (D) et du plan Π se développe, un frottement de coefficient constant f ; les frottements de roulement et de pivotement sont négligés. L'axe du disque est assujetti par un dispositif convenable de masse négligeable, à rencontrer l'axe Oz_0 en un point fixe K ; la distance $KG = \ell$ est constante. On pose $OI = \rho$ et $OK = h$, et on suppose (en perçant

éventuellement le plan Π d'un trou permettant le passage de l'axe du disque) que h peut être positif, négatif ou nul.
On désignera par $R_0(O,x_0,y_0,z_0)$ un trièdre fixe orthonormé ; Oz_0 est orienté vers le haut. On $R_G(G,x,y,z)$ un trièdre mobile orthonormé lié au disque ; Gz est orienté suivant KG. On repère le disque par les angles d'Euler ψ, θ, φ du trièdre R_G par rapport au trièdres R_0. On utilisera les trièdres intermédiaires d'Euler R_1 et R_2 ; R_1 a pour axes OX_1, OY_1, Oz_0, OY_1 étant porté par IO et orienté de I vers O, OX_1 est parallèle à la tangente au disque Iu ; R_2 a pour axes $GXYz$, GX étant parallèle à Iu.
On désigne par X_I, Y_I, Z_I les composantes dans R_1 de la réaction du plan Π sur le disque. On suppose que le disque est amené, sans vitesse initiale au contact du plan Π.
1- Donner l'expression de h et ρ en fonction de θ et ℓ.
2- Calculer la composante v sur l'axe Iu de la vitesse absolue du point I appartenant au disque et la composante u sur l'axe Iu de la vitesse de glissement du disque par rapport au plan Π.
3- Ecrire les théorèmes généraux de la mécanique au point K; calculer $\overset{\circ}{\psi}$ et $\overset{\circ}{\varphi}$ en fonction de v.
4- Ecrire dans l'hypothèse du glissement les lois des actions de contact au point I. En déduire que, après l'instant où le glissement s'est annulé, le mouvement est un roulement sans glissement.
5- Considérons la fonction v comme inconnue principale, former une équation différentielle vérifiée par la fonction $v(t)$. Intégrer cette équation et discuter l'allure du mouvement dans chacun des trois cas $h > 0$, $h = 0$ et $h < 0$.
6- Montrer que dans la phase de roulement sans glissement l'énergie cinétique reste constante.



Exercice 5: Mouvement d'un disque à l'intérieur d'un cerceau

Soit Ox_0 l'axe descendant du référentiel absolu $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et soient $R_1(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)$ et $R_2(B,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ deux repères orthonormés directs liés respectivement au cerceau C_1 et au cerceau C_2 sachant que $\vec{x}=\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$ et $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. On note par $\theta=(\widehat{\vec{x}_0,\vec{x}})$ et $\varphi=(\widehat{\vec{x}_0,\vec{u}})$; et par ψ l'angle que fait un point P du cerceau C_2 avec l'axe Ox_0.

1- Déterminer la position du centre d'inertie A du cerceau C_1 et du cerceau centre d'inertie B du cerceau C_2 dans la base du repère R_1 et donner les vecteurs instantanés de rotation de C_1, $\vec{\omega}(C_1/R_0)$, et de C_2, $\vec{\omega}(C_2/R_0)$, par rapport à R_0.

2- Calculer la vitesse du point de contact I_1 de C_1 par rapport à R_0, $\vec{V}(I_1 \in C_1/R_0)$.

3- Calculer la vitesse du point de contact I_2 de C_2 par rapport à R_0, $\vec{V}(I_2 \in C_2/R_0)$.

3- Déterminer la vitesse de glissement au point de contact I des deux cerceaux. Déduire, à partir de la condition de roulement sans glissement une première équation de mouvement qui lie les paramètres du système.
4- Déterminer le torseur dynamique du cerceau C_2 au point B.

5- En appliquant le théorème du moment dynamique au cerceau C_2 au point de contact I, donner une deuxième équation du mouvement.
6- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique déterminer une troisième équation du mouvement
7- Déterminer à partir du théorème de la résultante dynamique les composantes de la force de contact au point I. On pose $\vec{R}_I = R_u\vec{u} + R_v\vec{v}$.
8- On suppose que $\varphi << 1$ (φ très petit). Quelle est la nature du mouvement du cerceau C_2 dans le cas où θ est constant. Que peut on conclure à propos de la réaction $\vec{R}_I$ au point de contact I.

